

УДК 539.3

## СИМУЛЯТОР НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН

© 2014 г. А.И. Федоров, А.Р. Давлетова

ООО "РН-УфаНИПИнефть", г. Уфа, Россия

Представлены базовая модель и численный алгоритм для расчета напряженного состояния пласта в присутствии произвольно ориентированных трещин и неоднородного поля давления. Разработанный инструмент позволяет рассчитать направление образования и роста трещин в присутствии измененного поля давления.

**Ключевые слова:** пористые насыщенные среды, напряженное состояние пласта, гидроразрыв, направление образования трещин.

### Введение

Операция гидроразрыва пласта (ГРП), являющаяся одним из самых распространенных способов интенсификации добычи нефти при разработке низкопроницаемых коллекторов на месторождениях Западной Сибири, осуществляется сразу после завершения бурения скважины и является частью ее заканчивания. Благодаря широкомасштабному применению технологии ГРП с площадным заводнением стала возможна промышленная разработка низкопроницаемых коллекторов на таких западносибирских месторождениях как Приобское, Приразломное и Мало-Балыкское.

Эффективность системы заводнения в каждом частном случае зависит от ориентации и протяженности трещин гидроразрыва (трещин ГРП). В процессе разработки низкопроницаемых коллекторов напряженное состояние пласта меняется. Причина этих изменений связана с появлением новой объемной силы, воздействующей на пласт, – градиента пластового давления. Возникающие изменения в напряженно-деформированном состоянии пласта могут иметь целый ряд последствий. Так, анализ промысловых данных указывает на возникновение явления, называемого эффектом автогидроразрыва пласта (авто-ГРП), которое проявляется самопроизвольным ростом трещин. Другим не менее значимым следствием появления градиента пластового давления является изменение ориентации трещин на новых скважинах в зонах с измененным полем пластового давления (например, при уплотнении существующей системы разработки). В связи с этим очевидно, что отсутствие контроля за напряженным состоянием пласта может привести к прорывам закачиваемой жидкости в соседние добывающие скважины, повлечь за собой проблемы при бурении и эксплуатации скважин, расположенных в зоне высоких пластовых давлений, вызвать преждевременную обводненность скважин. Следовательно, необходим учет геомеханических эффектов для перспективной оценки развития техногенных трещин, что не может быть обеспечено современными методами исследований.

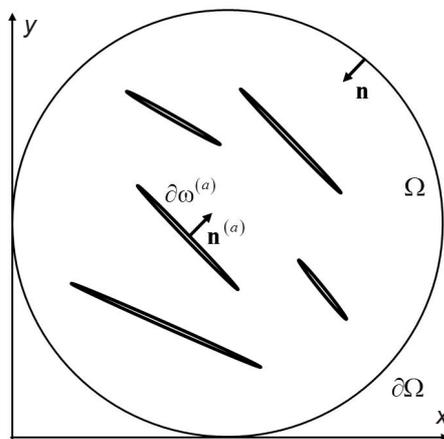
Цель данной работы – создание инструмента, позволяющего осуществлять прогноз и контроль развития трещин ГРП с учетом геомеханических эффектов для перспективной оценки развития техногенных трещин. Авторами представлена базовая модель для расчета напряженного состояния пласта в присутствии произвольно ориентированных трещин и неоднородного поля давления. В основе модели лежит континуальная теория фильтрации [Блохин, Доровский, 1994], дополненная критерием максималь-

ных растягивающих напряжений для расчета траектории растущих трещин. Численная реализация разработанного алгоритма выполнена на основе непрямого метода граничных элементов с введением функций влияния. В работе представлены результаты моделирования напряженно-деформированного состояния пласта и траекторий роста трещин для типичных систем заводнения как на синтетических примерах, так и с использованием реальных данных.

Разработанный инструмент позволяет производить достоверную оценку геометрии техногенных трещин и может применяться для предупреждения прорывов закачиваемой жидкости, а также для выбора оптимальных условий эксплуатации и повышения эффективности систем разработки.

### Постановка задачи

Рассмотрим двумерную область  $\Omega$  с внешней границей  $\partial\Omega$  (рис. 1), упругие параметры внутри которой будем считать постоянными. В области находится набор из  $N$  трещин, границы которых обозначим как  $\partial\omega^{(a)}$ ,  $a = 1, \dots, N$ .



**Рис. 1.** Схема области заводнения  $\Omega$  с произвольно ориентированными трещинами  $\partial\omega^{(a)}$ .  $\partial\Omega$  – внешняя граница области;  $\mathbf{n}$  – нормаль к внешней границе;  $\mathbf{n}^{(a)}$  – нормаль к поверхности трещины

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния в любой точке области  $\Omega$  с учетом корректно поставленных граничных условий на ее внешней границе  $\partial\Omega$  и на границах трещин  $\partial\omega^{(a)}$ .

Тензор напряжения совместно с полем деформаций и полем пластового давления является основным инструментом для определения направления образования и развития трещины. Пусть тонкий пласт находится в состоянии плоского напряженного состояния. Согласно теории континуальной фильтрации (см. Приложение), уравнения равновесия в присутствии фильтрационных процессов в дифференциальной форме имеют вид:

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{1}{\mu} \mathbf{F} = 0,$$

$$\mathbf{F} = -\alpha \nabla P,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} - \alpha P \delta_{ij},$$
(1)

где  $\mathbf{U}$  – поле деформаций твердой матрицы;  $\mathbf{F}$  – объемная сила;  $P$  – пластовое давление;  $\sigma_{ij}$  – полный тензор напряжений;  $\varepsilon_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) / 2$  – тензор деформаций;  $\lambda$  – коэффициент Ламе;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, соответствующий  $\lambda$  и  $\mu$ ;  $\alpha$  – коэффициент порозластичности. Система уравнений (1) должна замыкаться граничными условиями.

Существует, как правило, два типа трещин – с закреплением пропантом и без закрепления (гидравлические). Для закрепленных трещин в качестве граничного условия необходимо задание ширины раскрытия:

$$(\mathbf{U}, \mathbf{n}^{(a)})^+ - (\mathbf{U}, \mathbf{n}^{(a)})^- = w^{(a)}, \quad (2)$$

где  $w^{(a)}$  – заданное раскрытие (форма) трещины;  $\mathbf{n}^{(a)}$  – нормаль к линии трещины. Величина  $w^{(a)}$  при этом может зависеть от координаты вдоль трещины. В качестве приближения в большинстве случаев используется эллиптическая форма трещины.

Для гидравлических трещин в качестве граничного условия можно использовать непрерывность усилий на их поверхности:

$$\sigma_{ik} n_k^{(a)} = -P^{(a)} n_i^{(a)}, \quad (3)$$

где  $P^{(a)}$  – заданное давление в трещине.

В общем случае на удалении от области с трещинами ГРП наблюдается трехосное сжатие, определяемое давлением вышележащих пород и тектоническими процессами. Для тонких горизонтальных пластов состояние трехосного сжатия является субвертикальным [Economides, Nolte, 2000], которое удобно характеризовать величиной горного давления  $\Sigma_V$ , а также величинами горизонтальных напряжений  $(\Sigma_{H,max}, \Sigma_{H,min})$  и направлением максимального горизонтального напряжения  $(\phi_0)$ . Тогда на удаленной границе  $\partial\Omega$  достаточно потребовать равенства нормальных и касательных усилий, обусловленных невозмущенным значением тензора напряжений  $\bar{\sigma}_{ik}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} n_k \Big|_{\partial\Omega} &= \bar{\sigma}_{ik} n_k, \\ \bar{\sigma} &= T^T(\phi_0) \begin{pmatrix} -\Sigma_{H,max} & 0 \\ 0 & -\Sigma_{H,min} \end{pmatrix} T(\phi_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T(\phi_0)$  – матрица поворота на угол  $\phi_0$ ; величины  $\Sigma_{H,max}, \Sigma_{H,min}$  для удобства приняты положительными.

В процессе разработки пласта поле давления непрерывно меняется. Изменение пластового давления обусловлено фильтрационными процессами и описывается уравнением пьезопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \Delta p &= 0, \\ \mathbf{v} &= -\frac{k}{\eta} \nabla p, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость фильтрации жидкости;  $k$  – проницаемость породы;  $\eta$  – вязкость жидкости;  $\kappa$  – коэффициент пьезопроводности пласта (см. Приложение).

Характерные времена изменения пластового давления значительно больше времени установления напряженного состояния, поэтому уравнение равновесия (1) не содержит производных по времени. Таким образом, существует принципиальная возможность разделения задач фильтрации (5) и определения напряженного состояния пласта (1).

Далее в работе будет рассмотрено построение численного алгоритма для расчета напряженного состояния на заданном поле давления согласно системе уравнений (1) с граничными условиями (2)–(4).

### Интегральная формулировка

Классический способ решения системы уравнений (1) с постоянными коэффициентами и граничными условиями (2)–(4) при помощи интегральных уравнений заклю-

чается во введении функций Грина или функций источников поля. Решение в общем виде представляется следующим образом [Бенерджи, Баттерфилд, 1984]:

$$\begin{aligned} U_i &= \int_{\partial\omega \cup \partial\Omega} B_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} b_{ij}(x, \zeta) F_j(\zeta) dV(\zeta), \\ \sigma_{ik} &= \int_{\partial\omega \cup \partial\Omega} A_{ikj}(x, \xi) \varphi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} a_{ikj}(x, \zeta) F_j(\zeta) dV(\zeta), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $S(\xi)$  – параметризованная поверхность, на которой заданы источники с поверхностной плотностью  $\varphi_j(\xi)$ ;  $V(\zeta)$  – параметризованный объем исследуемой области с заданной объемной силой  $F_j(\zeta)$ ;  $B_{ij}(x, \xi)$ ,  $A_{ikj}(x, \xi)$ ,  $b_{ij}(x, \zeta)$ ,  $a_{ikj}(x, \zeta)$  – функции Грина соответствующих поверхностных и объемных источников для плоского напряженного состояния. Необходимо отметить, что в качестве поверхностных источников могут быть выбраны источники любого подходящего вида, в том числе разного типа при наличии таковых в условиях задачи. Так, в нашем случае в качестве элементарного источника поля (в том числе и на внешней границе  $\partial\Omega$ ) удобно выбрать локальный разрыв смещений.

Пусть все границы области  $\partial\omega \cup \partial\Omega$  представляют собой набор линейных источников (отрезков) с заданным вектором

$$\mathbf{D}^q = D_{\tau}^q \boldsymbol{\tau}^q + D_n^q \mathbf{n}^q, \quad q = 1, \dots, M, \quad (7)$$

где  $M$  – число линейных элементов в разбиении границы;  $q$  – номер элемента;  $\boldsymbol{\tau}^q$ ,  $\mathbf{n}^q$  – единичные векторы (касательный и нормальный к линии разрыва элемента) с номером  $q$ ;  $D_{\tau}^q$ ,  $D_n^q$  – амплитуды касательного и нормального разрыва смещений на линии источника.

Будем считать, что разрыв смещений на источнике – величина, постоянная вдоль линии источника. Применяя к выражениям (6) разбиение на линейные элементы, можно получить следующее представление для поля напряжений и смещений:

$$\begin{aligned} U_i(x, y) &= \sum_{q=1}^M \bar{B}_{i\tau}^q(x, y) D_{\tau}^q + \sum_{q=1}^M \bar{B}_{in}^q(x, y) D_n^q + \bar{b}_i(x, y), \\ \sigma_{ik}(x, y) &= \sum_{q=1}^M \bar{A}_{ik\tau}^q(x, y) D_{\tau}^q + \sum_{q=1}^M \bar{A}_{ikn}^q(x, y) D_n^q + \bar{a}_{ik}(x, y), \\ \bar{b}_i(x, y) &= \int_{\Omega} b_{ij}(x, \zeta) F_j(\zeta) dV(\zeta), \\ \bar{a}_{ik}(x, y) &= \int_{\Omega} a_{ikj}(x, \zeta) F_j(\zeta) dV(\zeta), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\bar{b}_i(x, y)$  и  $\bar{a}_{ik}(x, y)$  – вклад поля градиента давления в поле смещений и поле напряжений соответственно. Конкретный способ вычисления интегралов в (8) зависит от способа задания поля давлений. Компоненты функций Грина  $\bar{B}^q$ ,  $\bar{A}^q$ , определяемые с учетом ориентации элемента в пространстве, называются функциями влияния и являются аналитическими выражениями, которые можно найти, например, в работе [Крауч, Старфилд, 1987].

Величина разрыва смещений не определена только на той части границы, где заданы граничные условия непрерывности напряжений. Пусть на части границы  $q=1, \dots, M'$  заданы условия вида (3) или (4), под которые попадают также все элементы на внешней границе  $\partial\Omega$ . На оставшейся части границы  $q = M' + 1, \dots, M$  заданы разрывы смещения, которые определять не нужно. Применение граничных условий (3) к общим выражениям (7), например, в центральных точках каждого из отрезков разбиения дает

следующую систему уравнений для определения компонентов разрыва смещений  $D_\tau^q, D_n^q$ :

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{M'} \bar{A}_{ik\tau}^{qp} n_k^p D_\tau^q + \sum_{q=1}^{M'} \bar{A}_{ikn}^{qp} n_k^p D_n^q &= S_i^p, \\ \sum_{q=1}^{M'} \bar{A}_{ik\tau}^{qp} \tau_k^p D_\tau^q + \sum_{q=1}^{M'} \bar{A}_{ikn}^{qp} \tau_k^p D_n^q &= Q_i^p, \end{aligned} \tag{9}$$

$$S_i^p = -\bar{\sigma}_{ik}^p n_k^p - \left( \sum_{q=M'+1}^M \bar{A}_{ik\tau}^{qp} n_k^p D_\tau^q + \sum_{q=M'+1}^M \bar{A}_{ikn}^{qp} n_k^p D_n^q \right) - \bar{a}_{ik}^p n_k^p,$$

$$Q_i^p = -\bar{\sigma}_{ik}^p \tau_k^p - \left( \sum_{q=M'+1}^M \bar{A}_{ik\tau}^{qp} \tau_k^p D_\tau^q + \sum_{q=M'+1}^M \bar{A}_{ikn}^{qp} \tau_k^p D_n^q \right) - \bar{a}_{ik}^p \tau_k^p.$$

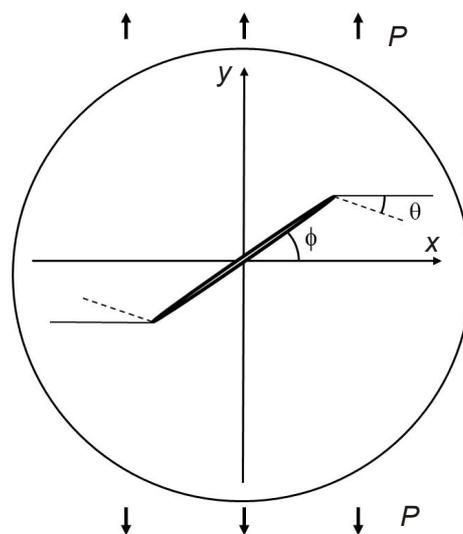
Решением системы уравнений (9) является набор компонентов разрывов смещений  $D_\tau^q, D_n^q$  для каждого элемента из разбиения поверхности. Подход, основанный на применении интегральных уравнений, позволяет существенно ускорить расчет при произвольном расположении линий трещин, а также уйти от вопросов, связанных с генерацией сложных сеток.

На основании описанного алгоритма был реализован симулятор для расчета напряженно-деформированного состояния пласта в присутствии произвольно ориентированных трещин. Далее будут рассмотрены некоторые модельные примеры, представляющие практический интерес.

### Результаты моделирования

Поскольку одним из возможных применений рассматриваемой задачи о расчете полей напряжения является определение траектории растущей трещины, в качестве тестовой можно взять задачу об определении коэффициентов интенсивности и направления развития ненагруженной трещины в упругой среде, находящейся в состоянии одноосного растяжения (рис. 2).

**Рис. 2.** Геометрия задачи об определении направления развития трещины в среде, находящейся под действием одноосного растяжения  $P$ . Стрелки вверх и вниз – направление приложения силы растяжения; штриховые линии – направление развития трещины;  $\phi$  – угол, характеризующий начальное положение трещины;  $\theta$  – угол, характеризующий направление развития трещины (углы отсчитываются от положительного направления оси  $x$ )



Коэффициенты интенсивности могут быть определены на основе асимптотических выражений для полей смещений [Черепанов, 1974]:

$$K_I = \frac{ED_n(r)}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{8r}}, \quad K_{II} = \frac{ED_\tau(r)}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{8r}},$$

где  $K_I, K_{II}$  – коэффициенты интенсивности для первого (нормального) и второго (тангенциального) типов разрыва соответственно;  $D_n(r), D_\tau(r)$  – разрыв смещения на расстоянии  $r$  от вершины трещины;  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругой среды. Коэффициент порозластичности  $\alpha=0$ , что соответствует упругой среде. Количество элементов на длину трещины – 100. Согласно [Черепанов, 1974], значения коэффициентов интенсивности определяют направление развития трещины –

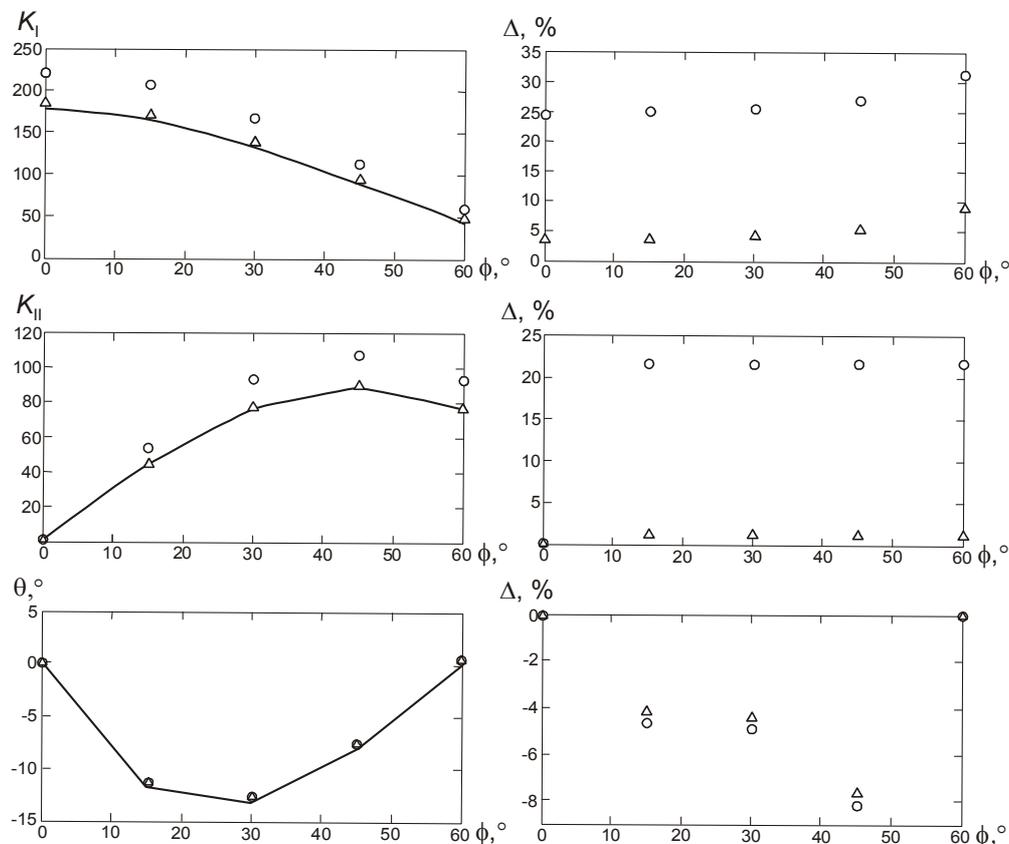
$$\theta = 2 \arctg \left( \frac{-2K_{II}}{K_I + \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}} \right). \quad (10)$$

В вышеназванной работе можно найти аналитическое выражение для коэффициентов интенсивности:

$$K_I = P\sqrt{\pi L} \cos^2 \phi, \quad K_{II} = P\sqrt{\pi L} \cos \phi \sin \phi,$$

где  $P$  – растягивающее напряжение;  $L$  – полудлина трещины;  $\phi$  – угол между линией трещины и осью  $x$  (см. рис. 2).

При тестировании алгоритма были выполнены два расчета коэффициентов интенсивности  $K_I, K_{II}$  и соответствующего им направления развития трещины  $\theta$  для набора значений начального положения трещины  $\phi$ . Эти расчеты различаются выбором расстояния  $r$  от вершины трещины и выполнены для  $r_1 = \Delta l / 2$  и  $r_2 = 3\Delta l / 2$  при одинаковом размере элемента; результаты расчетов представлены на рис. 3.



**Рис. 3.** Сравнение результатов расчета коэффициентов интенсивности  $K_I, K_{II}$  и направления роста трещины  $\theta$  с аналитическим решением задачи. Кружки – расчеты для  $r_1$ ; треугольники – для  $r_2$ ; непрерывная кривая – аналитическое решение

Для определения точности решения введена относительная ошибка измерения  $\Delta(A) = \frac{A - A_0}{A_0} \times 100\%$ , где  $A$  – произвольная величина,  $A_0$  – теоретическое значение.

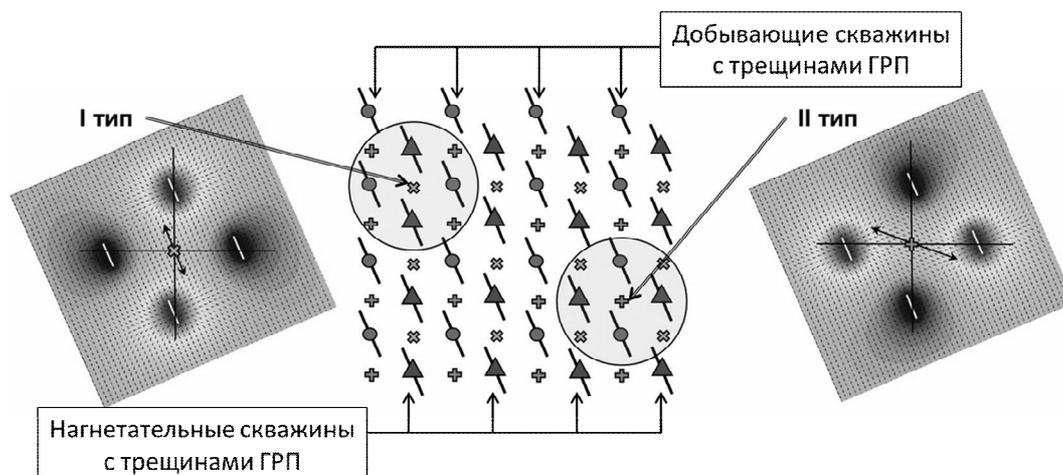
Слева на рис. 3 представлены зависимости коэффициентов интенсивности  $K_I$ ,  $K_{II}$  и направления развития трещины  $\theta$  от удаления, справа – соответствующая относительная ошибка. Ошибка определения коэффициентов интенсивности менее 5% для обоих коэффициентов интенсивности; направление  $\theta$ , рассчитанное по формуле (10), также определяется с приемлемой точностью (~8%).

В качестве примера практического применения разработанного алгоритма рассмотрим поля напряжения, возникающие в широко используемой пятиточечной системе разработки по истечении большого времени эксплуатации. Хорошо известно, что направление образования трещин гидроразрыва в зоне, не возмущенной эксплуатацией, совпадает с направлением максимального главного стресса регионального поля напряжений.

Предположим, что первоначальное расположение всех трещин в рассматриваемой зоне совпадает с направлением регионального напряженного состояния. На практике для повышения эффективности добычи зачастую применяются методы уплотнения пятиточечной системы разработки до девятиточечной. Схема уплотнения, на которой представлены два типичных положения новых уплотняющих скважин относительно работающих, приведена на рис. 4. В первом случае (тип I, скважины обозначены крестиками) уплотняющие скважины располагаются к северу и югу от нагнетательных (треугольники); во втором (тип II, скважины обозначены знаками плюс) – к востоку и западу от нагнетательных. Поле давления рассчитано в стационарном пределе (установившийся режим) для модели однофазной фильтрации.

Слева и справа на рис. 4 приведены карты давления, на которые наложены векторные схемы направлений максимального главного напряжения для соответствующих случаев. Параметры расчета приведены в таблице.

Для двух выделенных участков пятиточечной системы разработки с учетом измененного поля давления были рассчитаны значения направления максимального главного напряжения. В первом случае рассчитанное направление лишь немного (не более ~5°) отличается от регионального значения; во втором – оно существенно изменено (до ~45°).



**Рис. 4.** Изменение направления образования трещин при уплотнении пятиточечной системы разработки до девятиточечной при длительной эксплуатации. Описание см. в тексте

**Входные параметры для моделирования системы заводнения с уплотнением**

Входной параметр	Обозначение	Значение
Максимальное главное напряжение	$\Sigma_{\max}$	225 атм.
Минимальное главное напряжение	$\Sigma_{\min}$	180 атм.
Азимут анизотропии	$\phi_0$	$-21^\circ$
Пластовое давление на контуре питания	$P_0$	200 атм.
Давление на нагнетательных скважинах	$P_{\text{нар}}$	450 атм.
Давление на добывающих скважинах	$P_{\text{доб}}$	50 атм.
Модуль Юнга	$E$	16 ГПа
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0.3
Коэффициент порозластичности	$\alpha$	0.2
Полудлина трещин	$L$	100 м

Таким образом, проведение операции гидроразрыва на скважинах во втором случае может привести либо к прорыву трещины в нагнетательные скважины, либо к снижению эффективности работы уплотняющей скважины.

**Заключение**

В представленной работе описаны математическая модель и численный алгоритм для расчета полей напряжения в присутствии заданного неоднородного поля пластового давления. В качестве основы для математической модели выбрана континуальная теория фильтрации, для численного алгоритма – интегральная формулировка уравнения равновесия теории упругости.

Разработанный алгоритм может применяться для определения направления образования и роста трещин гидроразрыва в областях с существенно измененным полем пластового давления, а также для оценки рисков при выполнении операции гидроразрыва пласта, связанных с изменением направления максимального главного напряжения.

Использование внешнего симулятора для расчета поля пластового давления позволяет реализовать потенциал мощных и широко распространенных пакетов гидродинамического моделирования.

**Теория континуальной фильтрации. Стационарное напряженное состояние**

В качестве основы для построения модели рассмотрим общие динамические уравнения континуальной теории фильтрации [Блохин, Доровский, 1994]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}_i &= -\frac{\partial_i p}{\rho} - \frac{1}{2\rho} h_{km} \partial_i g_{km} + \frac{\rho_s}{2\rho} \partial_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 + f_i^\delta, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) u_i &= -\frac{\partial_i p}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \frac{\rho_l}{\rho_s} h_{km} \partial_i g_{km} - \frac{\rho_l}{2\rho} \partial_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{\rho_s} \partial_k h_{im} g_{mk} - \frac{\rho_l}{\rho_s} f_i^\delta, \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + u_j \partial_j g_{ik} + u_i \partial_j g_{jk} + u_j \partial_i g_{jk} &= 0, \\ \mathbf{j} &= \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \\ \mathbf{f}^\delta &= \chi \rho_l (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \\ \rho_s &= (1 - m) \rho_{s0}, \rho_l = m \rho_{l0}, \rho = \rho_s + \rho_l, \end{aligned} \tag{П.1}$$

где введены следующие обозначения:  $\rho$  – полная плотность пористого насыщенного тела;  $\rho_{s0}, \rho_{l0}$  – плотности материала твердой матрицы и насыщающего флюида;  $\rho_s, \rho_l$  – парциальные плотности матрицы и флюида;  $m$  – пористость;  $\chi$  – коэффициент межфазного трения;  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  – скорости смещения матрицы и флюида;  $\mathbf{j}$  – общий поток массы;  $\mathbf{f}^\delta$  – сила межфазного трения;  $g_{ik}$  – метрический тензор деформаций;  $h_{ik}$  – производная энергии по теоретическому тензору;  $p$  – термодинамическое давление.

Согласно формулам Мурнагана [Ландау, Лифшиц, 1987], тензор напряжений пористой насыщенной среды  $\sigma_{ik}$  выражается через давление и производную энергии по метрическому тензору:

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} - h_{im} g_{mk}. \tag{П.2}$$

Уравнения (П.1) необходимо замкнуть уравнениями состояния. Пусть невозмущенное состояние характеризуется параметрами  $\rho_0, g_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)} = 0, h_{ik}^{(0)} = 0, p^{(0)} = 0$ . Для дальнейшего изложения необходимо также ввести невозмущенные парциальные плотности насыщающей жидкости  $\rho_{0l}$  и твердой матрицы  $\rho_{0s}$ . Пусть также отсутствуют явления, связанные с теплопереносом. Обозначая символом  $\delta$  отклонения следующей за ним величины от равновесного состояния, можем записать обобщенный закон Гука для пористого пространства в виде [Блохин, Доровский, 1994]:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{K}{2} \delta g_{ll} + (K + \gamma) \varepsilon_\rho + \frac{\rho_s (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2}, \\ h_{ik} &= \mu \left( \delta g_{ik} - \frac{1}{3} \delta g_{ll} \delta_{ik} \right) + \frac{K}{2} \delta g_{ll} \delta_{ik} - K \varepsilon_\rho \delta_{ik} - \frac{\rho_s (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2}. \end{aligned} \tag{П.3}$$

где  $\varepsilon_\rho = \delta \rho / \rho$ ;  $K, \gamma, \mu$  – модули упругости пористой насыщенной среды, варианты измерения которых будут обсуждаться позже.

Статический вариант обобщенного закона Гука можно записать, положив  $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$ . Кроме того, имеет место следующая взаимосвязь метрического тензора и тензора деформаций:

$$\delta g_{ik} = -2\varepsilon_{ik} = -(\delta_k U_i + \delta_i U_k), \quad (\text{П.4})$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – тензор деформации;  $U_i$  – компоненты вектора деформации.

Сводя воедино формулы (П.2)–(П.4), получаем обобщенный закон Гука для статических процессов в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= 2\mu \left( \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right) - \gamma \varepsilon_{\rho} \delta_{ik}, \\ p &= K \varepsilon_{ll} + (K + \gamma) \varepsilon_{\rho}, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

здесь величины  $K$  и  $\gamma$  – объемные модули пористой насыщенной среды;  $\mu$  – модуль сдвига.

Избавляясь от относительного изменения плотности в выражении для тензора упругости (П.5), получим следующую формулу, выражающую связь между давлением, деформацией и тензором напряжений:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \left( \frac{\gamma K}{\gamma + K} - \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} - \frac{\gamma}{\gamma + K} p \delta_{ik}. \quad (\text{П.6})$$

Обозначая по аналогии с теорией упругости  $\lambda = \frac{\gamma K}{\gamma + K} - \frac{2}{3} \mu$  и вводя коэффициент порозластичности  $\alpha' = \frac{\gamma}{\gamma + K}$ , можем записать выражение (П.6) в виде взаимосвязи тензора напряжений и порового давления:

$$\sigma_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} - \alpha' p \delta_{ik}. \quad (\text{П.7})$$

Полученные уравнения состояния могут быть использованы для замыкания системы (П.1). Необходимо обратить внимание на введенное в теории континуальной фильтрации давление. Согласно уравнению движения жидкости (третье уравнение системы (П.1)), на границе “жидкость–пористая среда” для выполнения закона сохранения импульса жидкости необходимо выполнение равенства парциальных плотностей:  $p/\rho_0 = p_{\text{ж}}/\rho_{\text{ж}}$ , где  $p$  и  $\rho_0$  – соответственно давление и плотность пористой насыщенной среды;  $p_{\text{ж}}$  и  $\rho_{\text{ж}}$  – давление и плотность жидкости, находящейся в равновесии с пористой средой.

С другой стороны, более удобным в ряде случаев оказывается статическое (или пластовое) давление, которое по определению является непрерывным на границе “жидкость–пористая среда”:  $P = p_{\text{ж}}$ .

Таким образом, далее будем различать два вида давления – термодинамическое  $p$  и пластовое  $P$  – и учитывать связь между ними:

$$p = \frac{\rho_0}{\rho_{0l}} P. \quad (\text{П.8})$$

Уравнение (П.7) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= 2\mu \varepsilon_{ik} + \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ik} - \alpha P \delta_{ik}, \\ \alpha &= \alpha' \rho_0 / \rho_{0l}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Время установления поля напряжений определяется акустическими свойствами среды; время установления фильтрационных процессов в горной породе – проницаемостью и, как правило, на несколько порядков выше. Кроме того, на фоне макроскопического течения жидкости изменения скорости движения твердой матрицы и флюида можно считать пренебрежимо малыми (квазистатическое приближение). Также мы можем пренебречь квадратичными (конвективными) слагаемыми по скоростям деформации матрицы и фильтрации флюида.

В этом случае уравнения (П.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_l \mathbf{v}) &= 0, \\ -\frac{\nabla p}{\rho} - \chi \rho_l \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial_k \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Первое из уравнений (П.10) – уравнение неразрывности; второе – хорошо известный закон Дарси в дифференциальной форме, где  $\chi = \eta / k \rho \rho_l$  – определение коэффициента трения через вязкость  $\eta$  и проницаемость  $k$ ; третье – уравнение равновесия пористой среды. Система (П.10) замыкается уравнениями состояния (П.5). С учетом выражения для сжимаемости  $(\partial \rho / \partial p)|_{T, \varepsilon_{ii}} = \rho_0 / (\gamma + K)$ , следующего из второго уравнения состояния (П.5), система (П.10) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \Delta p &= 0, \\ \mathbf{v} &= -\frac{k}{\eta} \nabla p, \\ \frac{\partial_k \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где  $\kappa = \frac{k \rho_0 m}{\eta \rho_0 (\gamma + K)}$  – коэффициент пьезопроводности. Очевидно, что вместо термодинамического давления  $p$  в первом уравнении можно определять пластовое давление  $P$ .

Система уравнений может быть разбита на две независимые части – определение динамического поля пластового давления и определение квазистационарного напряженного состояния для поля давления, определенного в текущий момент времени. Запишем окончательный вид уравнения равновесия из системы (П.11) через деформации  $\mathbf{U}$  с учетом уравнения (П.9) и связи между тензором деформаций и деформациями (П.4):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{1}{\mu} \mathbf{F} &= 0, \\ \mathbf{F} &= -\alpha \nabla P. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

### Литература

- Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
- Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: Изд-во ОИГГМ СО РАН, 1994. 183 с.
- Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. Third Edition. Wiley, NY and Chichester, 2000. 750 p.

*Сведения об авторах*

**ФЕДОРОВ Александр Игоревич** – кандидат физико-математических наук, главный специалист ООО “РН-УфаНИПИнефть”. 450103, Уфа, ул. Бехтерева, д. 3. Тел.: +7 (347) 293-60-10 доб. 2519. E-mail: fedorovai@ufanipi.ru

**ДАВЛЕТОВА Алия Рамазановна** – ведущий специалист ООО “РН-УфаНИПИнефть”. 450103, Уфа, ул. Бехтерева, д. 3. Тел.: +7 (347) 293-60-10 доб. 2519. E-mail: davletovaar@ufanipi.ru

## **RESERVOIR STRESS STATE SIMULATOR FOR DETERMINING OF FRACTURE GROWTH DIRECTION**

A.I. Fedorov, A.R. Davletova

*LLC “RN-OufaNIPIneft”, Oufa, Russia*

**Abstract.** A basic model and a computational algorithm are described for stress state evaluation of the layer. The model includes arbitrarily oriented fractures and non-uniform pressure field. The method developed allows to calculate the direction of fracture generation and growth in presence of altered pressure field.

**Keywords:** porous saturated medium, formation stress state, hydraulic fracturing, direction of fracture generation.